ベクトル基本公式一覧①

1．ベクトルの演算

k, l は 実数とする。

① $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

② $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

③ $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

④ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AA}=0$, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

2．ベクトルの分解

ベクトルの分解[平面]

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

① 平面上の任意の $\vec{p}=$ $s\vec{a}+t\vec{b}$ のただ1通りの形に表される。

② $s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $s=s'$, $t=t'$

ベクトルの分解[空間]

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が同じ平面上にないとき

① 空間上の任意の $\vec{p}=$ $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ のただ1通りの形に表される。

② $s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=s'\vec{a}+t'\vec{b}+u'\vec{c}$ $\Leftrightarrow$ $s=s'$, $t=t'$, $u=u'$

3．ベクトルの成分

ベクトルの成分[平面]

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ とする。

○相等：$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow$ $a_1=b_1$, $a_2=b_2$

○大きさ：$|\vec{a}|=$ $\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

○成分による演算

k, l は実数とする

$k\vec{a}+l\vec{b}=k(a_1, a_2)+l(b_1, b_2)$

$=(ka_1+lb_1, ka_2+lb_2)$

ベクトルの成分[空間]

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ とする。

○相等：$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow$ $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ $a_3=b_3$

○大きさ：$|\vec{a}|=$ $\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

○成分による演算

k, l は実数とする

$k\vec{a}+l\vec{b}=k(a_1, a_2, a_3)+l(b_1, b_2, b_3)$

$=(ka_1+lb_1, ka_2+lb_2, ka_3+lb_3)$

4．$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさ

$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさ[平面]

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ とすると

$\overrightarrow{AB}=$ (b_1-a_1, b_2-a_2)

$|\overrightarrow{AB}|=$ $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさ[空間]

$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ とすると

$\overrightarrow{AB}=$ $(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$

$|\overrightarrow{AB}|=$ $\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

5．ベクトルの内積

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$

$\cos\theta=$ $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

内積の性質

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② $\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\end{cases}$

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ （k は実数）

④ $\vec{a}\cdot\vec{a}=$ $|\vec{a}|^2$ ⑤ $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

6．ベクトルの平行･垂直

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする

平行条件

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{b}=k\vec{a}$ （k は実数）

垂直条件

$\vec{a}\perp\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ベクトル基本公式一覧②

7．ベクトルの内積と成分

$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$, $\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$, $\vec{a},\vec{b}$ のなす角 $\theta\,(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とする。

ベクトルの内積と成分[平面]

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ とする

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\ a_1b_1+a_2b_2$

ベクトルの内積と成分[空間]

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ とする

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

8．三角形の面積

△OAB において

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}=(b_1, b_2)$ とすると、

面積 $S=\ \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}\ =\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

9．位置ベクトル

$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$,$C(\vec{c})$ とする。

○$\overrightarrow{AB}=\ \vec{b}-\vec{a}$

○線分AB を $m:n$ に内分する点は $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

○線分AB を $m:n$ に外分する点は $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

○線分 AB の中点は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

○線分 AB の重心は $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

10．ベクトル方程式

s, t は実数とする

○点$A(\vec{a})$ を通り， $\vec{d}(\vec{d}\fallingdotseq\vec{0})$に平行な直線 $\vec{p}=\ \vec{a}+t\vec{d}$

○点$P(\vec{p})$ が 2 点$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線上にあるとき

① $\vec{p}=\ (1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

② $\vec{p}=\ s\vec{a}+t\vec{b}\ (s+t=1)$

○平面上の点の存在範囲

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ のとき,

① $s+t=1,\ s\geqq0,\ t\geqq0$ ⇔ 点Pの存在範囲は線分AB上

② $0\leqq s+t\leqq1,\ s\geqq0,\ t\geqq0$ ⇔ 点Pの存在範囲は△OABの周および内部

11．ベクトルの表し方（まとめ）

k, s, t, u は実数とする

○点P は直線OA 上にある ⇔ $\overrightarrow{OP}=\ k\overrightarrow{OA}$

○点P は直線 AB 上にある ⇔ $\overrightarrow{OP}=\ s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s+t=1)$

$=\ s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}$

○点P は平面ABC上ある ⇔ $\overrightarrow{OP}=\ s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}\,(s+t+c=1)$

$=\ s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CP}=\ s\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{CB}$